$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \ln(\frac{n}{n+1}) \geq \frac{x}{n} \Leftrightarrow n \ln\frac{n}{n+1} \geq x$

x	$-\infty$	x_n	$n \ln\frac{n}{n+1}$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0		$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗ M_n		↘	$-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{n+1}+e^{\frac{x}{n}} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{n}} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{n}(\frac{n}{n+1}-\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad (X=\frac{x}{n})$

b) D'après le tableau des variations de f_n, $M_n = f_n(n \ln(\frac{n}{n+1}))$ est un maximum de f_n.

$f_n(n \ln\frac{n}{n+1})) = 1+\frac{n}{n+1} \ln\frac{n}{n+1} - e^{\ln\frac{n}{n+1}}$

$= 1+\frac{n}{n+1}\ln(\frac{n}{n+1}) - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$

$= \frac{n}{n+1}(\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}))$

Montrons que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1} > 0$. Soit $h(x) = \frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1}$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	$=$	
$h(x)$		↘ 0